

方法精讲-数量 2

主讲教师：唐宋

授课时间：2018.09.19



粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量 2（讲义）

学习任务：

1. 授课内容：工程问题、行程问题

2. 时长：2.5 小时

3. 对应讲义：159 页~164 页

4. 重点内容：

（1）工程问题的三种考法与对应解题步骤，以及常用的赋值方法

（2）行程问题的基础公式与等距离平均速度公式

（3）直线和环形上的相遇、追及的计算公式，用图示理解复杂的运动过程

（4）多次相遇的结论、流水行船的公式，行程公式的比例性质

第四节 工程问题

例 1（2018 陕西）要完成某项工程，甲施工队单独干需要 30 天才能完成，乙施工队需要 40 天才能完成。甲乙合作干了 10 天，因故停工 10 天，再开工时甲、乙、丙三个施工队一起工作，再干 4 天就可全部完工。那么，丙队单独干需要大约（ ）天才能完成这项工程。

- | | |
|-------|-------|
| A. 21 | B. 22 |
| C. 23 | D. 24 |
| E. 25 | F. 26 |
| G. 27 | H. 28 |

例 2（2018 江苏）编制一批“中国结”，甲乙合作 6 天可完成；乙丙合作 10 天可完成；甲乙合作 4 天后，乙再单独做 5 天可完成，则甲、乙、丙的工作效率之比是（ ）。

- | | |
|------------|------------|
| A. 3: 2: 1 | B. 4: 3: 2 |
| C. 5: 3: 1 | D. 6: 4: 3 |

例 3 (2018 江苏) 某新建农庄有一项绿化工程, 交给甲、乙、丙、丁 4 人合作完成。已知 4 人的工作效率之比为 3: 5: 4: 6, 甲乙合作完成所需时间比丙丁合作多 9 天, 则 4 人合作完成工程所需时间是 ()。

- A. 17 天
- B. 18 天
- C. 19 天
- D. 20 天

例 4 (2018 浙江) 机械厂加工某器件, 需依次进行 3 道工序, 工作量的比依次是 3: 2: 4。甲完成 1 个工件后又完成了第 2 个工件的前两道工序, 正好用时 1 小时。已知甲和乙的加工效率比是 7: 9, 问乙完成 1 个工件需要多长时间? ()

- A. 30 分钟
- B. 36 分钟
- C. 42 分 10 秒
- D. 46 分 40 秒

例 5 (2018 国考) 工程队接到一项工程, 投入 80 台挖掘机。如连续施工 30 天, 每天工作 10 小时, 正好按期完成。但施工过程中遭遇大暴雨, 有 10 天时间无法施工。工期还剩 8 天时, 工程队增派 70 台挖掘机并加班施工。问工程队若想按期完成, 平均每天需多工作多少个小时? ()

- A. 1.5
- B. 2
- C. 2.5
- D. 3

例 6 (2018 广州) 办公室需要复印一批文件, 使用甲复印机单独印需要 20 分钟, 使用甲乙两台复印机一起印需要 12 分钟, 已知甲复印机每分钟比乙复印机多印 6 份文件, 则这批文件一共有 () 份。

- A. 216
- B. 240
- C. 360
- D. 600

第五节 行程问题

一、基础行程



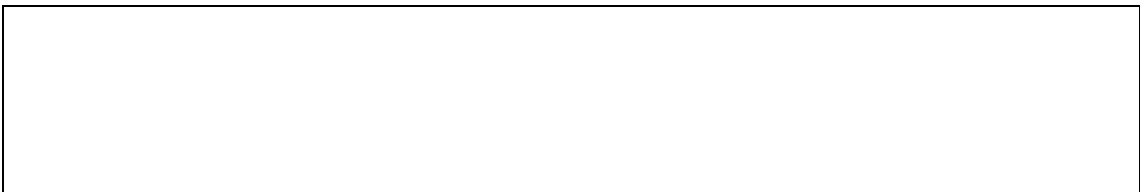
例 1(2018 国考)一辆汽车第一天行驶了 5 个小时,第二天行驶了 600 公里,第三天比第一天少行驶 200 公里,三天共行驶了 18 个小时。已知第一天的平均速度与三天全程的平均速度相同,问三天共行驶了多少公里? ()

- A. 800
- B. 900
- C. 1000
- D. 1100

例 2(2016 云南事业单位)李大夫去山里给一位病人出诊,他下午 1 点离开诊所,先走了一段平路,然后爬上了半山腰,给那里的病人看病。半小时后,他沿原路下山回到诊所,下午 3 点半回到诊所。已知他在平路步行的速度是每小时 4 千米,上山每小时 3 千米,下山每小时 6 千米。请问李大夫出诊时共走了多少路? ()

- A. 5 千米
- B. 8 千米
- C. 10 千米
- D. 16 千米

二、相对行程



例 1.(2018 联考)甲、乙、丙、丁四人同时同地出发,绕一椭圆形环湖栈道行走。甲顺时针行走,其余三人逆时针行走。已知乙的行走速度为 60 米/分钟,丙的速度为 48 米/分钟。甲在出发 6、7、8 分钟时分别与乙、丙、丁三人相遇,求丁的行走速度是多少?

- A. 31 米/分钟
- B. 36 米/分钟
- C. 39 米/分钟
- D. 42 米/分钟

例 2 (2018 深圳) 清晨, 爷爷、爸爸和小磊在同一条笔直跑道上朝同一方向匀速晨跑, 某一时刻, 爷爷在前, 爸爸在中, 小磊在后, 且三人之间的间距正好相等。跑了 12 分钟后小磊追上了爸爸, 又跑了 6 分钟后小磊追上了爷爷, 则再过 () 分钟, 爸爸可追上爷爷。

- A. 12
- B. 15
- C. 18
- D. 36

例 3 (2017 广东) 老林和小陈绕着周长为 720 米的小花园匀速散步, 小陈比老林速度快。若两人同时从某一起点同向出发, 则每隔 18 分钟相遇一次; 若两人同时从某一起点相反方向出发, 则每隔 6 分钟相遇一次。由此可知, 小陈绕小花园散步一圈需要多少分钟? ()

- A. 6
- B. 9
- C. 15
- D. 18

例 5 (2017 山东) 有 A、B 两家工厂分别建在河流的上游和下游, 甲、乙两船分别从 A、B 港口出发前往两地中间的 C 港口。C 港与 A 厂的距离比其与 B 厂的距离远 10 公里。乙船出发后经过 4 小时到达 C 港, 甲船在乙船出发后 1 小时出发, 正好与乙船同时到达。已知两船在静水中的速度都是 32 公里/小时, 问河水流速是多少公里/小时? ()

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7

三、比例行程

【例】(2017 河南) 老王和老李沿着小公园的环形小路散步, 两人同时出发, 当老王走到一半路程时, 老李走了 100 米; 当老王回到起点时, 老李走了 $\frac{5}{6}$ 的路程。问环形小路总长多少米?

- A. 200
- B. 240
- C. 250
- D. 300

方法精讲-数量 2 (笔记)

学习任务:

1. 授课内容: 工程问题、行程问题

2. 时长: 2.5 小时

3. 对应讲义: 159 页~164 页

4. 重点内容:

(1) 工程问题的三种考法与对应解题步骤, 以及常用的赋值方法

(2) 行程问题的基础公式与等距离平均速度公式

(3) 直线和环形上的相遇、追及的计算公式, 用图示来理解复杂的运动过程

(4) 多次相遇的结论、流水行船的公式, 行程公式的比例性质

【拓展】(2018 四川) 10 个相同的盒子中分别装有 1~10 个球, 任意两个盒子中的球数都不相同。小李分三次每次取出若干个盒子, 每次取出的盒子中的球数之和都是上一次的 3 倍, 且最后剩下 1 个盒子。问剩下的盒子中有多少个球?

A. 9

B. 6

C. 5

D. 3

【解析】拓展. 10 个盒子, 任意两个盒子中的球数都不相同, 即 10 个盒子的球数分别为 1~10。取 3 次球, 设第一次取了 n 个球, “每次取出的盒子中的球数之和都是上一次的 3 倍”, 即第二次取 $3n$ 个球, 第三次取 $9n$ 个球。10 个盒子中球的总数为 $1+2+3+\dots+9+10=55$ 个 (等差数列求和, $(1+10) \cdot 10/2=55$), 设剩下的一个盒子中有 x 个球, 取走的球数和剩下的球数加和为总数: 55, 即 $n+3n+9n+x=55$, $x=55-13n$, n 和 x 的范围都是 1~10, n 取 1~3 时, x 均大于 10, 不满足。只有当 n 取 4 时, $x=3$, 满足条件。**【选 D】**

第四节 工程问题

【知识点】工程问题 (常用的应用题型):

1. 基本公式（三量关系）：

（1）工程量=效率*时间。

例：100 块砖每小时搬 50 块，需要 2 小时搬完，总量=50*2=100 块。

（2）效率=工程量/时间。

例：100 块砖 2 小时搬完，则每小时搬 $100/2=50$ 块。

（3）时间=工程量/效率。

例：100 块砖每小时搬 50 块，需要 $100/50=2$ 小时搬完。

（4）所有的工程问题都是围绕这三个量来出题的，不同的题目切入方法不同，有的题从工程量着手，有的题从效率着手，给的条件不同，用不同的方法。

2. 给定完工时间型：

（1）赋总量（完工时间的公倍数）。

（2）算效率：效率=总量/时间。

（3）根据工作过程列方程。

（4）完工时间：一次性完成全部工作所需的时间。

（5）例：唐老师和小龙去搬一车砖，唐老师 2 小时搬完，小龙 3 小时搬完，问两人合作多少小时搬完？

答：条件中只给了时间，没有给出总量或每小时搬多少等具体量，问的也不是具体量，说明题目所求与具体量没有关系，可以用赋值法。（1）先假设砖的总量：设总量为完工时间公倍数（如果设为 1 的话，后面计算效率时会出现分数）： $2*3=6$ 。（2）算效率：效率=总量/时间，则唐老师的效率= $6/2=3$ ；小龙的效率= $6/3=2$ 。（3）求合作时间：时间=总量/效率， $6/(2+3)=1.2$ 小时。

例 1（2018 陕西）要完成某项工程，甲施工队单独干需要 30 天才能完成，乙施工队需要 40 天才能完成。甲乙合作干了 10 天，因故停工 10 天，再开工时甲、乙、丙三个施工队一起工作，再干 4 天就可全部完工。那么，丙队单独干需要大约（ ）天才能完成这项工程。

- A. 21
- B. 22
- C. 23
- D. 24
- E. 25
- F. 26

G. 27

H. 28

【解析】例 1. 题干中分别给出了甲、乙的完工时间。(1) 设总量为 30 和 40 的公倍数，求公倍数用短除法：30 和 40 先约 10，剩 3 和 4 互质，约数和剩下的数乘起来： $10 \times 3 \times 4 = 120$ 。(2) 算效率：甲 = $120 / 30$ 天 = 4，乙 = $120 / 40$ 天 = 3。(3) 整个工程分三部分完成：甲乙合作 10 天后停工 10 天，最后三人合作 4 天完成总工作，设丙的效率为 x ，可以根据工程总量列出等式： $10 \times (4+3) + 0$ (停工) $\times 10 + 4 \times (4+3+x) = 120$ ，解得 $x = 50 / 4 - 7 = 5.5$ 。丙单独做耗时： $t_{丙} = \text{总量} / \text{效率} = 120 / 5.5 = 21.8^+$ ，比 21 天多，选 22 天。【选 B】

【注意】1. 完工时间：一次性完成全部工作的时间（如果题中给出 3 天完成工程的一部分，则不是完工时间）。

2. 找公倍数：短除法，有互质的先相乘，有倍数的留大的。

(1) 例：求 5、6、8 的公倍数：

答：先看互质的，5 和 6 互质，公倍为两者乘积为 30，再求 30 和 8 的公倍数，先约 2，余 15 和 4， $2 \times 15 \times 4 = 120$ 。

(2) 例：求 30、15、12 的公倍数：

答：15 和 30 存在倍数关系，有倍数的留大的，公倍数就是 30，再求 30 和 12 的公倍数，先约 6 剩 5 和 2， $6 \times 5 \times 2 = 60$ 。

例 2 (2018 江苏) 编制一批“中国结”，甲乙合作 6 天可完成；乙丙合作 10 天可完成；甲乙合作 4 天后，乙再单独做 5 天可完成，则甲、乙、丙的工作效率之比是 ()。

A. 3: 2: 1

B. 4: 3: 2

C. 5: 3: 1

D. 6: 4: 3

【解析】例 2. 方法一：已知甲乙合作，乙丙合作的完工时间。(1) 赋总量：赋总量为 6 和 10 的公倍数 30。(2) 算效率：甲乙效率和= $30/6=5$ ，乙丙效率和= $30/10=3$ 。(3) 直接看选项，只有 A 项： $3+2=5$ ， $2+1=3$ ，两者比为 5: 3，恰好满足甲+乙=5，乙+丙=3，其他选项均不满足。

方法二 (正常做法)：(1) 总量=30。(2) 效率：甲乙效率和= $30/6=5$ ，乙丙效率和= $30/10=3$ 。(3) “甲乙合作 4 天后，乙再单独做 5 天可完成”，根据总量列方程： $5*4+乙*5=30$ ，解得乙=2，甲乙和为 5，则甲=3，对应 A 项。**【选 A】**

【注意】给出了甲、乙、丙三者的效率比，即选项信息充分，考虑代入排除法。

【知识点】给效率比例：

1. 赋效率 (满足比例即可)。
2. 算总量：效率*时间=总量。
3. 根据工作过程列方程。

4 例：唐老师和小龙去搬一车砖，唐老师和小龙的效率比为 3: 2，已知两人合作需要 10 天搬完，问唐老师单独搬要多少天？

答：已知效率比例为 3: 2。(1) 设效率：设唐老师效率为 3，小龙效率为 2。(2) “两人合作 10 天完工”，即总量= $(3+2)*10=50$ 。(3) 唐老师单独搬耗时=总量/效率= $50/3=16.7$ 天。

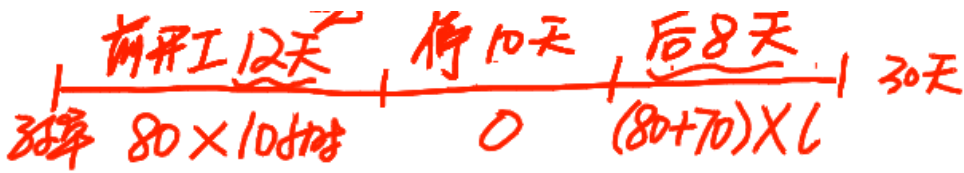
例 3 (2018 江苏) 某新建农庄有一项绿化工程，交给甲、乙、丙、丁 4 人合作完成。已知 4 人的工作效率之比为 3: 5: 4: 6，甲乙合作完成所需时间比丙丁合作多 9 天，则 4 人合作完成工程所需时间是 ()。

天，每天工作 10 小时，正好按期完成。但施工过程中遭遇大暴雨，有 10 天时间无法施工。工期还剩 8 天时，工程队增派 70 台挖掘机并加班施工。问工程队若想按期完成，平均每天需多工作多少个小时？（ ）

- A. 1.5
- B. 2
- C. 2.5
- D. 3

【解析】例 5. 题干没有告诉甲、乙等条件，只给出了 80 台挖掘机，即不是给定完工时间，也不是给定效率比例。（1）设每台机器单位时间（每小时）的效率为 1。（2）80 台机器每天工作 10 小时，工作 30 天完工，即总量=80*30*10*1=24000。（3）实际工作分为 3 个阶段，可以画线段示意整个工程完成情况，前期工作 12 天后停 10 天，最后工期还剩 8 天，前 12 天正常工作效率为 80*10；中间停工效率为 0；最后 8 天增加 70 台挖掘机，设每天工作 t 小时，则最后 8 天效率为 (80+70)*t，根据总量列方程：80*10*12+150*8*t=24000，解得 t=12 小时，原来每天工作 10 小时，现在多工作 2 小时，即加班 2 小时，对应 B 项。

【选 B】



【注意】遇到 N 名工人、N 台机器等表述时，一般默认每人、每台机器的效率均相等，可设为 1。则此时工作效率=人数或台数。

【知识点】给具体单位型（个/块/吨）：前五题是主流考法，第六题是非主流考法，可不使用工程思维，用方程法便可以做，不听课也能做。如搬 1200 块砖、修 1500 米公路、制作 300 个零件。赋值是随便假设 1 个数，是 1 或 100 均可，题目中有具体值时无法赋值，需要设未知数，将原来想赋值的量设为 x。

- 1. 设未知数。
- 2. 找等量关系列方程。

例 6（2018 广州）办公室需要复印一批文件，使用甲复印机单独印需要 20 分钟，使用甲乙两台复印机一起印需要 12 分钟，已知甲复印机每分钟比乙复印

机多印 6 份文件，则这批文件一共有（ ）份。

- A. 216
- B. 240
- C. 360
- D. 600

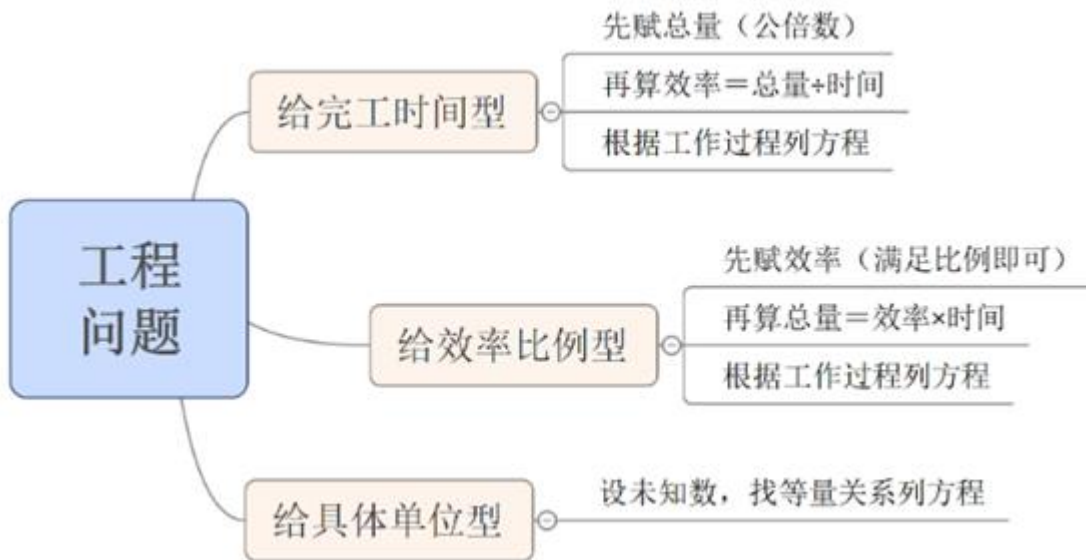
【解析】例 6. 方法一：有具体份数，不能赋值，可以设未知数，12、20 的公倍数是 60（如下图），方程法常结合倍数特性，份数应是 12、20 的公倍数，故而设总量为 $60x$ ，甲效率= $60x/20=3x/分钟$ ，甲、乙效率= $5x$ ，乙效率= $5x-3x=2x/分钟$ ，“甲复印机每分钟比乙复印机多印 6 份文件” $\rightarrow 3x-2x=6$ 份 $\rightarrow x=6$ ，总份数= $60x=360$ 。

方法二：本方法是纯方程法，“甲复印机每分钟比乙复印机多印 6 份文件”，设甲效率为 $x+6$ ，乙效率为 x ，总量= $20*(x+6)=12*(x+6+x)$ ，解出 x ，代回得到总量。**【选 C】**

【注意】做题多了后，会不自觉地倾向于方法一，看到 20 分钟、12 分钟，便会想到设总量。

$$60 = 4 \overbrace{12}^{\times} \quad 3 \overbrace{20}^{\times}$$

【答案汇总】 1-5: BADAB; 6: C



【小结】工程问题：

1. 给完工时间型：

(1) 根据时间赋总量（公倍数），不一定设最小公倍数。如 8、10，可以设总量为 80（最小公倍数是 40），没有给总量才能赋值，只要能赋值，说明数值不影响答案，类似小学生喜欢赋值为 1，若能找到最小的，建议设最小的，减少计算量，计算量大时容易出错，考试时可以偷懒，将两个数做乘积也可以，不影响答案，总量翻倍后效率也会翻倍，翻倍的总量/翻倍的效率得到的时间不变，最后的答案不受影响。

(2) 再算效率=总量/时间。

(3) 根据工作过程列方程。

2. 给效率比例型：

(1) 先赋效率（满足比例即可），注意顺序。

(2) 再算总量=效率*时间。

(3) 根据工作过程列方程。

(4) 效率的赋值方法：

①直接给效率比，如甲的效率是乙的 2 倍，甲=乙*2，设甲为 2，乙是 1；甲：乙=3：2，设甲为 3，乙是 2。

②间接给效率比，如甲三天做的量等于乙两天做的量，甲 3 天=乙 2 天，总量相同，用时长则效率低，单位时间做的量少，成反比，甲效率：乙效率=2：3。

3. 给具体单位型：设未知数，找等量关系列方程。

第五节 行程问题

一、基础行程

【知识点】行程问题：三个量存在乘法关系。

1. 公式：路程=速度*时间，每秒钟走 2 米，10 秒走 20 米；速度=路程/时间，20 米的路程走了 10 秒，速度为 $20/10=2$ 米/秒；时间=路程/速度，20 米的路，速度为 2 米/秒，时间为 $20/2=10$ 秒。

2. 考查题型：

- (1) 基础行程：即一般行程问题，考基本概念，如基本公式、平均速度。
- (2) 相对行程：相遇、追及、流水行船。
- (3) 比例行程：不从纯公式角度分析，分析正比、反比，切入点不同。

例 1(2018 国考)一辆汽车第一天行驶了 5 个小时，第二天行驶了 600 公里，第三天比第一天少行驶 200 公里，三天共行驶了 18 个小时。已知第一天的平均速度与三天全程的平均速度相同，问三天共行驶了多少公里？（ ）

- A. 800
- B. 900
- C. 1000
- D. 1100

【解析】例 1. 方法一：给了三天，画一条线段，分为三段，“第一天的平均速度与三天全程的平均速度相同”，设第一天平均速度为 V ，则总平均速度也是 V ，第一天走了 5 小时，第二天走了 600 公里，“第三天比第一天少行驶 200 公里”，第一天的路程为 $5V$ ，第三天的路程为 $5V-200$ ，共走 18 小时，总速度为 V ，总路程= $18V$ ，总路程=三天路程加和，代入数据： $5V+600+5V-200=18V$ ， $8V=400$ ，解得 $V=500$ ，所求 $18V=900$ 。

Handwritten notes in red ink showing a calculation:

$$\text{路程 } (5V + 600\text{km} + 5V - 200) = 18V$$

速度 V 共 $18h$

时间 $5h$ $18h$

方法二：倍数特性有两种情况，甲、乙用 18 天做完一项工程，工程总量= $18*(甲+乙)$ ，四个选项依次为 240、250、270、300，总量是 18 的倍数。本题中，三天行驶的路程= $18 \text{ 小时} * \text{平均速度}$ ，做不出来时，根据 18 的倍数选答案，18 有 9 因子，只有 B 项是 9 的倍数，很可能是答案。时间、速度不一定是整数，但行程问题中想用倍数特性，便要放宽要求，行程问题中很少有一定是整数的量，要么直接选，要么代入 B 项，不要太较真。【选 B】

【知识点】等距离平均速度：

1. 平均速度定义：平均速度=总路程/总时间，有时考查特殊情况，最常见的便是等距离平均速度。

2. 例：唐宋老师从家到公司，去时速度为 100，回家速度为 60，问全程的平均速度？

答：注意并非 $(100+60)/2=80$ ，除非从家到公司与从公司到家所用时间相同，但此时家到公司与公司到家的路程不同，一会是 100，一会是 60，若答案中有 80，可直接排除，不会做在剩余三项中蒙一个，有 1/3 的正确率。赋值路程 $S=300$ ， $\bar{V} = (300+300) / (300/100+300/60) = 600/8=75$ 。

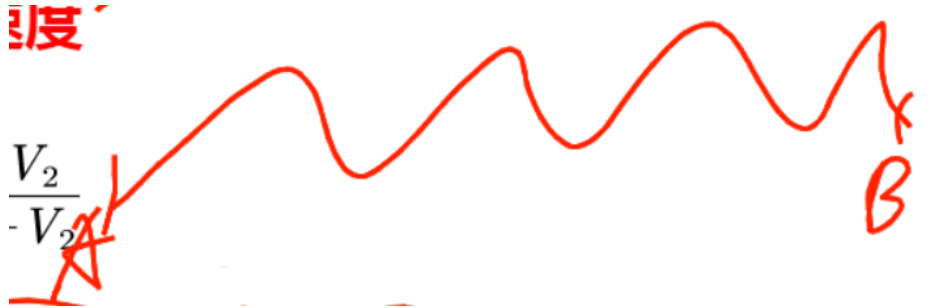
3. 公式： $\bar{V} = 2 * V_1 * V_2 / (V_1 + V_2)$ 。

4. 推导（看懂即可，无需记住）：设来回路程均为 S ，去程速度为 V_1 ，回程速度为 V_2 ， $\bar{V} = S_{\text{总}} / t_{\text{总}} = (S+S) / (S/V_1 + S/V_2) = 2 / (1/V_1 + 1/V_2) = 2 / [(V_1 + V_2) / (V_1 * V_2)] = 2 * V_1 * V_2 / (V_1 + V_2)$ 。

5. 适用于：等距离往返、上下坡往返。

6. 例：唐宋老师从家 A 到学校 B 上班，上山速度为 V_1 ，下山速度为 V_2 ，仅从 A 到 B，没有往返，平均速度不能使用等距离平均速度公式；若往返，A→B 再 B→A，去程：上山（AC 段）速度为 V_1 ，下山（CB 段）速度为 V_2 ；回程：上山（BC

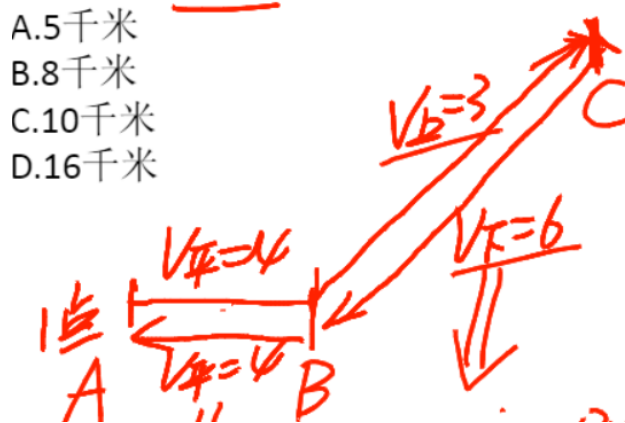
段) 速度为 V_1 , 下山 (CA) 速度为 V_2 , 每一段路都是 V_1 、 V_2 各走一遍, $A \rightleftharpoons C$ 是等距离往返, $C \rightleftharpoons B$ 也是等距离往返, 此时可用等距离平均速度公式, 不管两段的距离, 即便是九曲十八弯 (如下图), 也可以使用。



例 2 (2016 云南事业单位) 李大夫去山里给一位病人出诊, 他下午 1 点离开诊所, 先走了一段平路, 然后爬上了半山腰, 给那里的病人看病。半小时后, 他沿原路下山回到诊所, 下午 3 点半回到诊所。已知他在平路步行的速度是每小时 4 千米, 上山每小时 3 千米, 下山每小时 6 千米。请问李大夫出诊时共走了多少路? ()

- A. 5 千米
- B. 8 千米
- C. 10 千米
- D. 16 千米

【解析】例 2. 方法一: 1 点钟出发, 先走平路, 再爬山, 平路、山的比例关系未知, 无需关注, 往返便可以使用等距离平均速度公式。注意看病的 0.5h 需要去掉, 即在病人家中的半小时无需考虑, $t_{\text{走}} = 3.5 - 1 - 0.5 = 2\text{h}$, $S_{\text{走}} = 2 * \bar{V}_{\text{全程}}$ 。A→B: 平路的平均速度 $\bar{V}_{\text{平}} = 4$, $\bar{V}_{\text{BC}} = 2 * 3 * 6 / (3 + 6) = 4$, 全程分为两部分, 前后的平均速度不变, 说明 $\bar{V}_{\text{全程}} = 4$, $S_{\text{走}} = 2 * \bar{V}_{\text{全程}} = 2 * 4 = 8\text{km}$ 。



方法二: 根据出题人的出题习惯和命题思维, 有平路、下坡、上坡的题目,

全程平均速度与平路速度往往一致，真题中目前无反例，若平路一个平均速度，上下坡是另一个平均速度，此时缺少条件无法做，命题时会把两段路的平均速度设置成相同的，左边平路，右边上下坡，平路的速度容易算（已知）， $\bar{V}_{\text{全程}} = \bar{V}_{\text{平路}} = 4$ ，且若不这样设置，需要添加条件，还会增加计算量，故而得到此方法。【选B】

【注意】2h 是往返总时间，去程、回程均已计入，无需再乘以 2。

【答案汇总】1-2: BB

二、相对行程

【知识点】直线相遇与环形相遇：

1. 直线相遇： $S_{\text{相遇}} = V_{\text{和}} * T$ 。

(1) 牛郎和织女鹊桥相会，牛郎速度快一点为 V_1 ，织女速度慢一点为 V_2 ，相遇时间为 T ，全程为 S ，牛郎走的路程为 V_1T ，织女走的路程为 V_2T ， $S = V_1 * T + V_2 * T = (V_1 + V_2) * T = V_{\text{和}} * T$ 。

直线相遇与环形相遇



(2) 若两人不是同时出发，如牛郎先出发1小时，之后再相遇，单独走的部分单独算，或从总路程中减掉，之后再按相遇计算， $S = V_{\text{牛}} * 1 + (V_{\text{牛}} + V_{\text{女}}) * T_{\text{相遇}}$ 。绝大多数情况是同时出发。

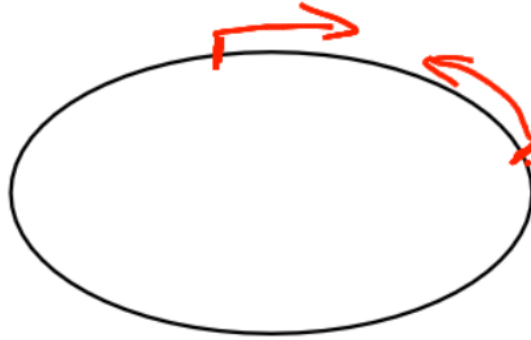
2. 环形相遇： $S_{\text{相遇}} = V_{\text{和}} * T$ 。

(1) 牛郎、织女相背而行，一左一右，在环形上走路，在某点相遇，两人走的路程分别为 $V_1 * T$ 、 $V_2 * T$ ，两人走完一个全程，环形中的全程是一整圈，则 $S_{\text{环}} = 1 \text{圈} = V_1 * T + V_2 * T = (V_1 + V_2) * T$ 。

(2) 直线相遇、环形相遇的算法均为 $S = V_{\text{和}} * T$ 。

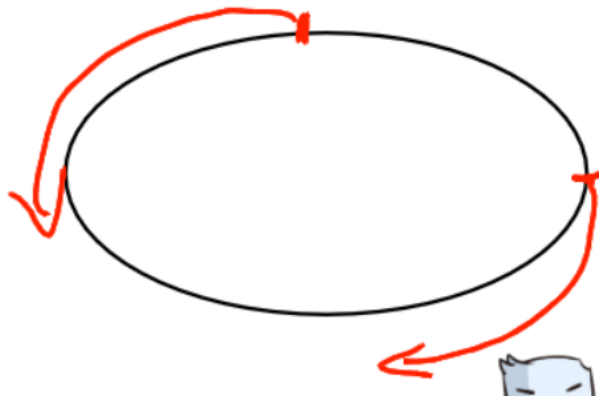
(3) 不同点出发:

①同向而行, 此时与直线相遇相同, 只是将直线掰弯, 殊途同归。



②背向而行, 则相遇路程是大半圈, 若相向而行, 则相遇路程是小半圈。

环形绝大多数情况考查同点出发, 直线相遇通常考查同时不同点出发。

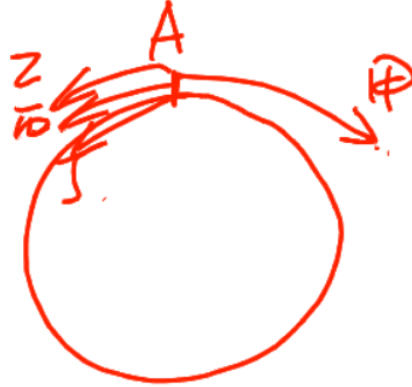


例 1. (2018 联考) 甲、乙、丙、丁四人同时同地出发, 绕一椭圆形环湖栈道行走。甲顺时针行走, 其余三人逆时针行走。已知乙的行走速度为 60 米/分钟, 丙的速度为 48 米/分钟。甲在出发 6、7、8 分钟时分别与乙、丙、丁三人相遇, 求丁的行走速度是多少?

- A. 31 米/分钟
- B. 36 米/分钟
- C. 39 米/分钟
- D. 42 米/分钟

【解析】例 1. 画一个圆弧, 从 A 点出发, 甲顺时针走, 乙、丙、丁逆时针走, 甲分别于乙、丙、丁三个人相遇, 思考三次相遇过程, “再过 1 分钟” 不好想, 看成三次独立的相遇过程。第一次: 甲和乙用时 6 分钟相遇, $V_{乙}=60$, $S_{圆}=(V_{甲}+60)*6$ 分钟①; 第二次: 甲和丙相遇: $S_{圆}=(V_{甲}+48)*7$ 分钟②; 第三次:

甲与丁相遇： $S_{\text{圈}} = (V_{\text{甲}} + V_{\text{丁}}) * 8$ 分钟③。得到三个等量关系，要求 $V_{\text{丁}}$ ，需要先求 $V_{\text{甲}}$ 、 $S_{\text{圈}}$ ，可以根据①②求出， $S_{\text{圈}} = 6V_{\text{甲}} + 360 = 7V_{\text{甲}} + 7 * 48 \rightarrow V_{\text{甲}} = 360 - 336 = 24$ ，代入①： $S_{\text{圈}} = 84 * 6$ ，代入③： $84 * 6 = (24 + V_{\text{丁}}) * 8 \rightarrow V_{\text{丁}} = 63 - 24 = 39$ 。【选 C】



【注意】本题考试时需要 2 分钟，别的题目做得再快，题量也是有限的。再想提高只能做数学，考试建议用 15 分钟做数学，若共 15 题，目的是做出 7 至 10 题，若仅有 10 题，做 7 题即可，平均 1.5 至 2 分钟做一题。看不懂的题目可以放弃，如排列组合问题，本题列方程只需要二三十秒，解出答案便能得分，故而要做。数学的平均正确率为 30%，即 10 道题对 3 题，数学起点低，我们的目标是 15 分钟做对 7 至 10 题。不是难算到极点的题目建议完整计算。

【知识点】直线追及：

1. 如男生追女生，在某个地方追上女生，能追上是由于女生速度比较慢，走的路程为 $V_{\text{慢}} * T$ ，男生走的速度比较快，路程为 $V_{\text{快}} * T$ ，距离差为 $S_{\text{追及}}$ ，则 $S_{\text{追及}} = (V_{\text{快}} - V_{\text{慢}}) * T$ 。

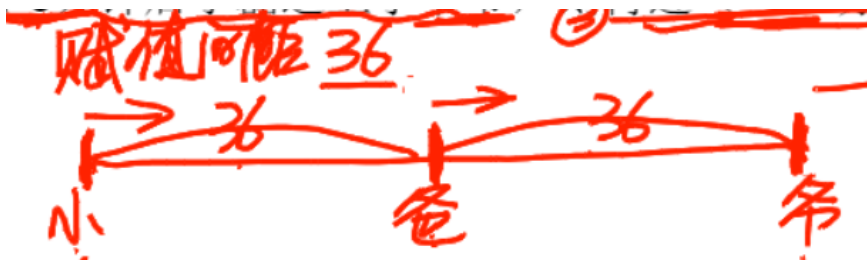
2. 公式： $S_{\text{追及}} = (V_{\text{快}} - V_{\text{慢}}) * T = V_{\text{差}} * T$ ，追及路程=追及刚开始时两人的距离。如唐宋老师的速度为 5m/s，张小龙速度为 2m/s，唐宋老师离张小龙 30 米， $30 / (5 - 2) = 10$ ，需要 10 秒，唐宋老师才能追上张小龙。



例 2 (2018 深圳) 清晨, 爷爷、爸爸和小磊在同一条笔直跑道上朝同一方向匀速晨跑, 某一时刻, 爷爷在前, 爸爸在中, 小磊在后, 且三人之间的间距正好相等。跑了 12 分钟后小磊追上了爸爸, 又跑了 6 分钟后小磊追上了爷爷, 则再过 () 分钟, 爸爸可追上爷爷。

- A. 12
- B. 15
- C. 18
- D. 36

【解析】例 2. 方法一: 非常热门的题目, 考法很多, 浙江、江苏考到类似的, 如果联考出现这类题也是正常的。注意是笔直跑道, 三个人间距相等, 爷爷在前, 爸爸在中间, 小磊在后面。题目有三个追及过程, 题目问的是时间, 给的也是时间, 没有路程的量, 赋值间距为 36 (12 和 18 的公倍数), 依题意列式: $36 = (V_{小} - V_{爸}) * 12$ 分钟①, $36 * 2 = (V_{小} - V_{爷}) * (12 + 6)$ 分钟②, $36 = (V_{爸} - V_{爷}) * t$ ③。求时间 t , 需要知道爸爸和爷爷的速度差, 由①可知 $V_{小} - V_{爸} = 3$, 由②可知 $V_{小} - V_{爷} = 4$, 则 $V_{爸} - V_{爷} = 1$, 即爸爸和爷爷的速度差为 1, 代入③, 即 $t = 36 / 1 = 36$ 分钟, 题目问再跑几分钟, 36 分钟是总共跑了 36 分钟, 前面跑了 $12 + 6 = 18$ 分钟, $36 - 18 = 18$ 分钟, 即再过 18 分钟, 爸爸追上爷爷, 对应 C 项。



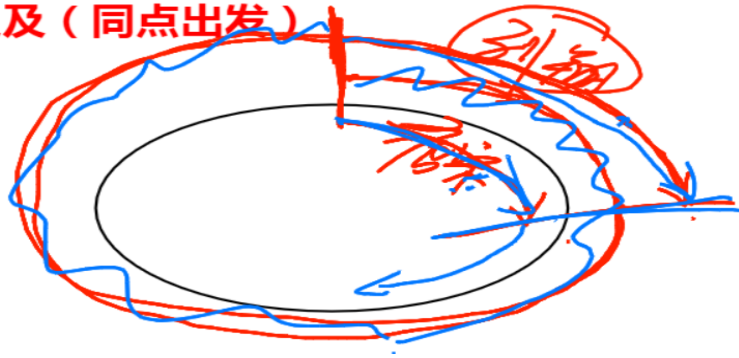
方法二: 以坑治坑, 出题老师考这类考法往往设置陷阱。前面已经跑了 $12 + 6 = 18$ 分钟, 问再跑几分钟, 算的时候不可能先算再跑多久, 先算的是共跑多久, 算出的是共 x 分钟, 答案是 $x - 18$ 分钟, 观察选项里面有没有两个选项差 18 分钟, D 项 - C 项 = 18, 则 C 项当选。**【选 C】**

【知识点】 环形追及 (同点出发):

1. 在环形追及, 考的是同点出发。如唐宋老师跑的慢, 刘翔跑了一整圈回来, 又跑到这里, 追上唐宋老师, 比唐宋老师多跑了整整一圈。第二次追上, 多跑了 2 圈; 第三次追上, 多跑了 3 圈, 追上几次就是多跑几圈。

2. 公式: $S_{\text{追及}} = (V_{\text{快}} - V_{\text{慢}}) * T$ 。追上 1 次: $S_{\text{追及}} = 1$ 圈; 追上 N 次: $S_{\text{追及}} = N$ 圈。

环形追及 (同点出发)



例 3 (2017 广东) 老林和小陈绕着周长为 720 米的小花园匀速散步, 小陈比老林速度快。若两人同时从某一起点同向出发, 则每隔 18 分钟相遇一次; 若两人同时从某一起点相反方向出发, 则每隔 6 分钟相遇一次。由此可知, 小陈绕小花园散步一圈需要多少分钟? ()

- A. 6
- B. 9
- C. 15
- D. 18

【解析】例 3. 周长即环形, 只要是封闭的图形就是环形, 同向出发是追及。看到“同向”, 把后面出现的“相遇”打个×, 这是出题老师设置的陷阱, 相遇分为迎面相遇或者背后相遇, 我们说的追及即是同向相遇。数学上, 只要是相遇, 两个人方向是相反的; 只要是追及, 两个是同向的。判定追及还是相遇, 以方向为准, 同向考追, 相反方向考遇。

方法一: 依题意可知 18 分钟追上一次, 6 分钟相遇一次。环形上, $S_{\text{遇}} = S_{\text{圈}} = V_{\text{和}} * T_{\text{遇}} = V_{\text{和}} * 6 = 720$, $S_{\text{追}} = S_{\text{圈}} = V_{\text{差}} * T_{\text{追}} = V_{\text{差}} * 18 = 720$, 解得: $V_{\text{和}} = 120$, $V_{\text{差}} = 40$ 。知道速度和、速度差, $V_{\text{大}} = (V_{\text{和}} + V_{\text{差}}) / 2 = 80$, 可以当个小公式记一下。求小陈绕一圈的时间, 已知“小陈比老林速度快”, 即小陈的速度为 $V_{\text{大}}$, $t_{\text{陈}} = 720 / V_{\text{大}} = 720 / 80 = 9$ 分钟, 对应 B 项。

方法二: 两个人反向出发, 6 分钟相遇一次, 相遇的时候, 小陈速度快, 则小陈 6 分钟走了一大半圈, 老林 6 分钟走了一小圈。题目问小陈走一圈的时间, 小陈的速度大于老林的速度, 小陈走老林的部分不用 6 分钟, 即小陈走一圈的时间 = 6 + (<6), 排除 C、D, 小陈走自己的部分用了 6 分钟, 走一圈不可能是 6 分钟, 排除 A 项。可以记住结论: 速度大的, 则 $t_{\text{大}} < 2 * t_{\text{遇}}$; 速度小的, 则 $t_{\text{小}} <$

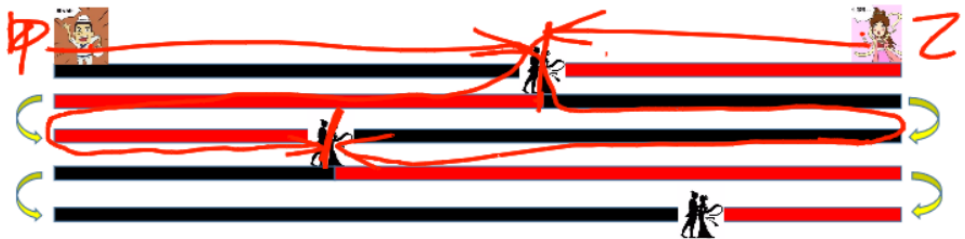
2*t 遇。【选 B】



【知识点】多次相遇（两端出发）：

1. 多次相遇指的是甲乙之间不断跑，如牛郎和织女，想在鹊桥相遇，两人在王母娘娘这里喝酒喝多了，没认出对方，两人继续往前走，在某个点相遇。

2. 两端出发相遇：第 1 次相遇，共走 1S；第 2 次相遇，共走 3S；第 3 次相遇，共走 5S；第 n 次相遇，共走 $(2n-1)S = V_{和} * T$ 。如题目问第三次相遇用了多少时间，把 n=3 代入公式，即 $5S = V_{和} * T$ ， $T = 5S / V_{和}$ 。



例 4（2015 联考）在一次航海模型展示活动中，甲乙两款模型在长 100 米的水池两边同时开始相向匀速航行，甲款模型航行 100 米要 72 秒，乙款模型航行 100 米要 60 秒，若调头转身时间略去不计，在 12 分钟内甲乙两款模型相遇次数是（ ）。

- A. 9
- B. 10
- C. 11
- D. 12

【解析】例 4. 相向考的是相遇，题目问相遇多少次，即考多次相遇，公式： $(2n-1)S = V_{和} * T$ ，题目求 n，找 S，S 是一个单程为 100，T 为 12， $V_{和} = V_{甲} + V_{乙}$ ，即 $(2n-1)S = V_{和} * T = (100/72 + 100/60) * 720$ ，注意单位的统一，12 分钟=720 秒。出现两个复杂分数相加或者相减，再乘一个大数，分别乘往往计算比较计算，原

式 $(2n-1)S=100*10+12*100$ ，解得 $2n=23$ ，即 $n=11.5$ 。次数是只有相遇到了才算一次，11.5 是指已经相遇了 11 次，还不到 12 次，对应 C 项。【选 C】

【注意】多次相遇的考法一般不考虑追及相遇，考试不用纠结。

【知识点】流水行船：

1. $V_{顺}=V_{船}+V_{水}$ ， $V_{逆}=V_{船}-V_{水}$ ，常识理解。

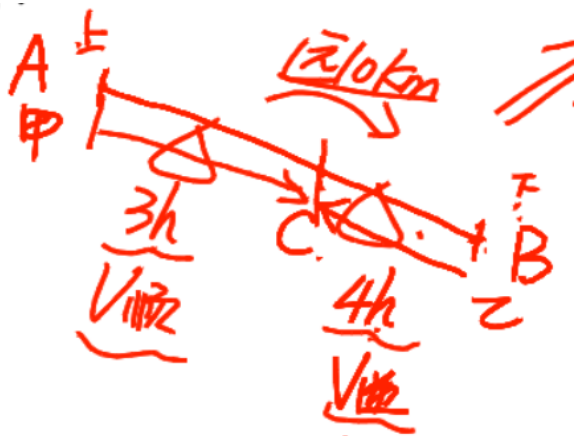
2. $V_{船}=(V_{顺}+V_{逆})/2$ ， $V_{水}=(V_{顺}-V_{逆})/2$ ，是推导出来的，建议可以记一下。
如去的时候速度为 50，回来的速度为 40，船在水中的问题，则 $V_{水}=(50-40)/2=5$ 。

3. 静水速度=船速、漂流速度=水速。

例 5（2017 山东）有 A、B 两家工厂分别建在河流的上游和下游，甲、乙两船分别从 A、B 港口出发前往两地中间的 C 港口。C 港与 A 厂的距离比其与 B 厂的距离远 10 公里。乙船出发后经过 4 小时到达 C 港，甲船在乙船出发后 1 小时出发，正好与乙船同时到达。已知两船在静水中的速度都是 32 公里/小时，问河水流速是多少公里/小时？（ ）

- A. 4
B. 5
C. 6
D. 7

【解析】例 5. 建议大家画一下图，上游画的高一点，下游画的低一点即可，分别标一下上游 A、下游 B，C 在 A 和 B 的中间，更靠近 B。乙船从 B（下游）行驶到 C 从，逆水行驶了 4 个小时，已知“船在乙船出发后 1 小时出发，正好与乙船同时到达”，甲船从 A（上游）行驶到 C，顺水行驶了 3 小时。已知“C 港与 A 厂的距离比其与 B 厂的距离远 10 公里”，即 $3*V_{顺}=4*V_{逆}+10$ ，船速为 32，即 $3*(32+V_{水})=4*(32-V_{水})+10$ ，解得 $V_{水}=42/7=6$ ，对应 C 项。【选 C】



【答案汇总】1-5: CCBC

三、比例行程

【知识点】比例行程：考试考得比较少，难度不高，刚学可能思维上不好把握。

1. $S=V*T$ 。

(1) S 一定， V 、 T 成反比。如同一段路，甲从 A 到 B 花了 90 分钟，乙从 B 到家花了 100 分钟，路程一定，时间比为 90/100，速度比为 $100/90=10/9$ 。

(2) V 一定， S 、 T 成正比。

(3) T 一定， S 、 V 成正比。

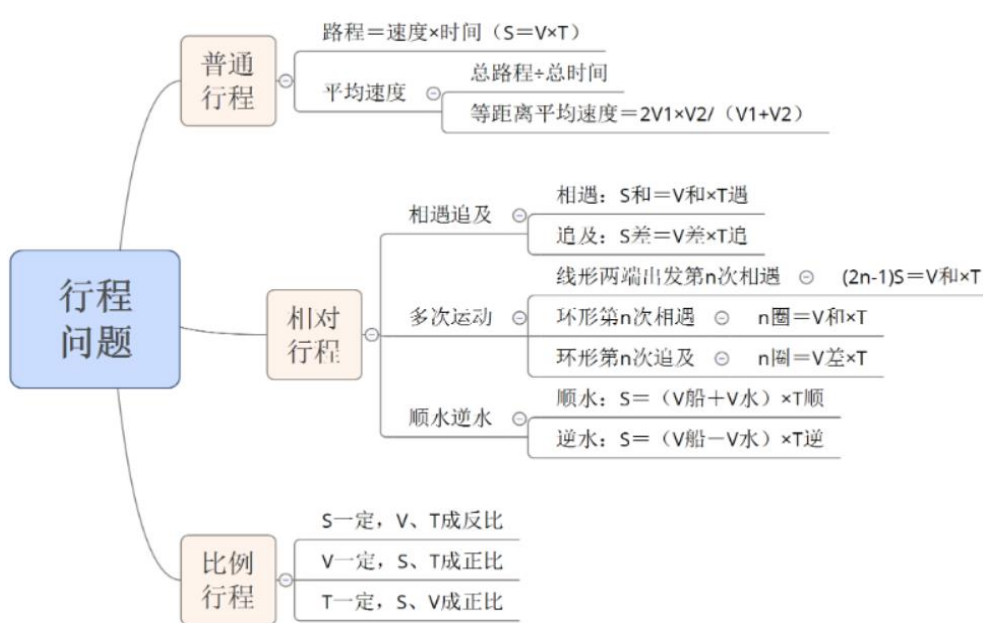
2. 方法：确定不变量，找比例。比如题目告诉我们走了同一段路程，路程相等。当题目给了“当甲……时，乙……”，即时间一样。

【例】(2017 河南)老王和老李沿着小公园的环形小路散步，两人同时出发，当老王走到一半路程时，老李走了 100 米；当老王回到起点时，老李走了 $5/6$ 的路程。问环形小路总长多少米？

- A. 200
- B. 240
- C. 250
- D. 300

【解析】例. 已知“当老王走到一半路程时，老李走了 100 米；当老王回到起点时，老李走了 $5/6$ 的路程”，这两句话都是“当……的时候，路程……”的形式，意味着时间是一样的，时间 t 一定， S 之比是 v 之比。已知“当老王走到

一半路程时，老李走了 100 米”，则 $V_{王}/V_{李}=1/2S/100$ ；已知“当老王回到起点时，老李走了 $5/6$ 的路程”， $V_{王}/V_{李}=S/(5/6S)$ 。 $V_{王}/V_{李}=1/2S/100=S/(5/6S)$ ，解得 $5/6*S=2*100$ ， $S=200*6/5=240$ ，对应 B 项。【选 B】



【小结】行程问题：

1. 普通行程：

- (1) 路程 = 速度 × 时间 ($S = V \times T$)。
- (2) 平均速度：
 - ① 总路程 / 总时间。
 - ② 等距离平均速度 = $2V_1 \times V_2 / (V_1 + V_2)$ 。

2. 相对行程：

- (1) 相遇追及：
 - ① 相遇: $S_{和} = V_{和} \times T_{遇}$ 。
 - ② 追及: $S_{差} = V_{差} \times T_{追}$ 。
- (2) 多次运动：
 - ① 线形两端出发第 n 次相遇: $(2n-1)S = V_{和} \times T$; 线性同一端出发: $2nS = V_{和} \times T$ 。
 - ② 环形第 n 次相遇: $n_{圈} = V_{和} \times T$ 。
 - ③ 环形第 n 次追及: $n_{圈} = V_{差} \times T$ 。
- (3) 顺水逆水：

①顺水: $S = (V_{\text{船}} + V_{\text{水}}) * T_{\text{顺}}$ 。

②逆水: $S = (V_{\text{船}} - V_{\text{水}}) * T_{\text{逆}}$ 。

3. 比例行程:

(1) S 一定, V、T 成反比。

(2) V 一定, S、T 成正比。

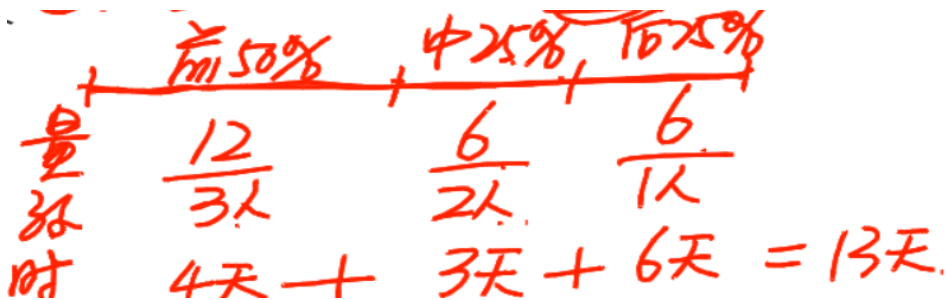
(3) T 一定, S、V 成正比。

课后测验

1. (2017 联考) 某件刺绣产品, 需要效率相当的三名绣工 8 天才能完成; 绣品完成 50% 时, 一人有事提前离开, 绣品由剩下的两人继续完成; 绣品完成 75% 时, 又有一人离开, 绣品由最后剩下的那个人做完。那么, 完成该件绣品一共用了:

- A. 10 天
- B. 11 天
- C. 12 天
- D. 13 天

【解析】1. 效率相当的三名绣工, 相当于 n 台机器, 设每人每天效率为 1, 总量为 $3 * 8 * 1 = 24$ 。24 的总量完成 50% 的时候, 前 50% 的量为 12, 3 个人工作, 效率为 3, 时间 = $12 / 3 = 4$ 天。50% 到 75%: 完成了 25%, 量为 6, 2 个人工作, 效率为 2, 时间 = $6 / 2 = 3$ 天。75% 到 100%: 1 个人工作, 效率为 1, 量为 6, $6 / 1 = 6$ 天。总时间 = $4 + 3 + 6 = 13$ 天, 对应 D 项。【选 D】

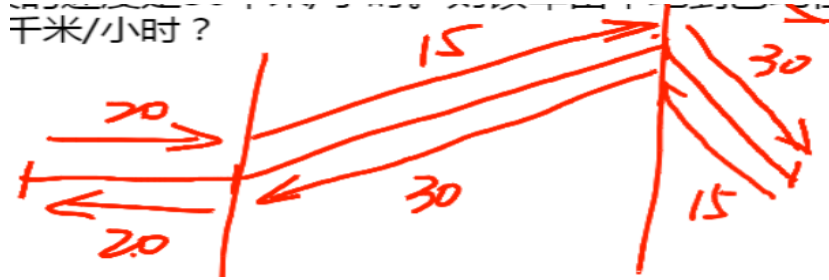


2. (2015 山东) 从甲地到乙地 111 千米, 其中 $1/4$ 是平路, $1/2$ 是上坡路, $1/2$ 是下坡路。假定一辆车在平路的速度为 20 千米/小时, 上坡的速度是 15 千米/小时, 下坡

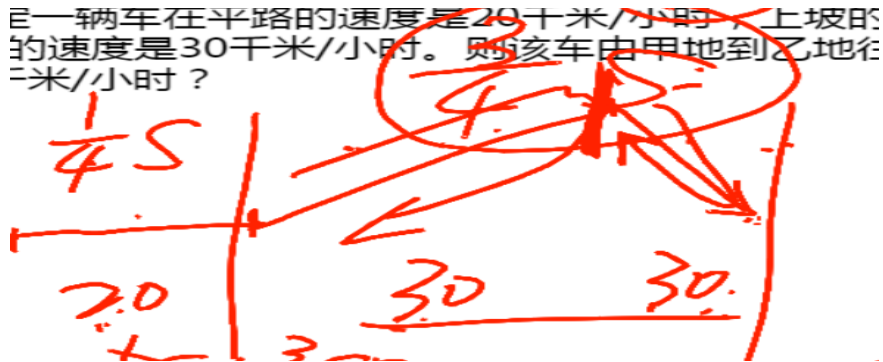
【解析】2. 方法一: 有平路、上坡、下坡, 求全程平均速度, 常理来讲, 需

要分开计算，平路速度往往和往返速度一样，考试直接选 B 项。

方法二：1/4 是平路，平路速度来回都是 20；1/2 是上坡路，去的时候是上坡，速度为 15，回来的时候是下坡，速度为 30；1/2 是下坡路，去的时候是下坡，速度为 30，回来的时候是上坡，速度为 15。等距离往返， $V_{往返} = (2 \times 15 \times 30) / (15 + 30) = 20$ ，和平路速度一样，即平均速度为 20，对应 B 项【选 B】



【注意】如果题目改为平路速度为 20，上下坡往返速度都是 30，则有 3/4S 的速度为 30，1/4S 的速度为 20，则 $V = (1/4S + 3/4S) / [(1/4S) / 20 + (3/4S) / 30]$ 。前面例 2 的题目没有说上下坡和平路路程的比例，如果上下坡和平路速度不一样，无法做。



【注意】1. 所有光鲜亮丽的背后，都曾熬过无数个不为人知的黑夜。

2. 预习范围：第六节经济利润问题，第七节高频几何。

3. 预习要求：

(1) 原则上要做完每个章节至少 50% 的题目。

(2) 实在不会做的话，对每节前几题要有充分的思考，熟悉题型和题意。

【答案汇总】第四节：1-5：BADAB；6：C

第五节：基础行程：1-2：BB；相对行程：1-5：CCBCC；比例行程：B

遇见不一样的自己

Be your better self